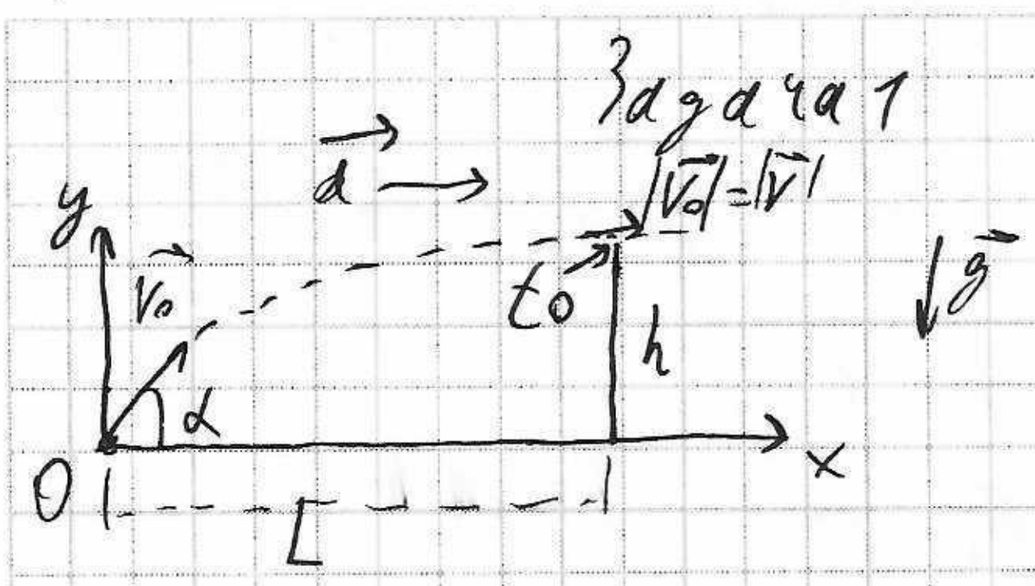
Вариант задания 1

Задача 1



$a - ?$, $V_0 - ?$, пусть $\alpha = (\vec{V_0}, \widehat{Ox})$, t_0 – момент перелёта мяча через забор. $L = 10$ м, $h = 5$ м, $g = 10$ м/с^2

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha + at \\ V_y = V_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = V_0 \cos\alpha\, t + \frac{at^2}{2} \\ y = V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

в момент времени t_0:

$$\begin{cases} L = V_0 \cos\alpha\, t_0 + \frac{a t_0^2}{2} \\ h = V_0 \sin\alpha\, t_0 - \frac{g t_0^2}{2} \\ V_0 = V_0 \cos\alpha + a t_0 \\ 0 = V_0 \sin\alpha - g t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} \\ V_0 = V_0 \cos\alpha + \frac{a}{g} V_0 \sin\alpha \Rightarrow 1 = \cos\alpha + \frac{a}{g}\sin\alpha \\ L = \frac{V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} + \frac{a V_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} \\ h = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \end{cases}$$

$$V_0^2 = \frac{2gh}{\sin^2\alpha}$$

$$t_0 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$L = 2h\cos\alpha + \frac{ah}{g} \;\Big|\; \frac{a}{g} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$L = \frac{2gh}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{g} + \frac{a \sin^2\alpha}{2g^2} \cdot \frac{2gh}{\sin^2\alpha} \quad \text{II} \quad \Rightarrow L = \frac{2h\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} h \Rightarrow$$

$$\cos\alpha + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \frac{L}{h} = 2 \qquad \Rightarrow \frac{L}{h} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Можно использовать оборот листа для записи решений

$2 = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow 2 = \frac{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2$

$\boxed{\alpha = 2\operatorname{arcctg} 2}$

$\frac{a}{g} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{g}{2} = \boxed{5\ м/с^2}$ $\quad t_0 = 1c$

$V_0 = \sqrt{\frac{2gh}{\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha} = \boxed{12{,}5\ м/с}$

Ответ: $|\vec{a}| = 5\ м/с^2$, $|\vec{V_0}| = 12{,}5\ м/с$

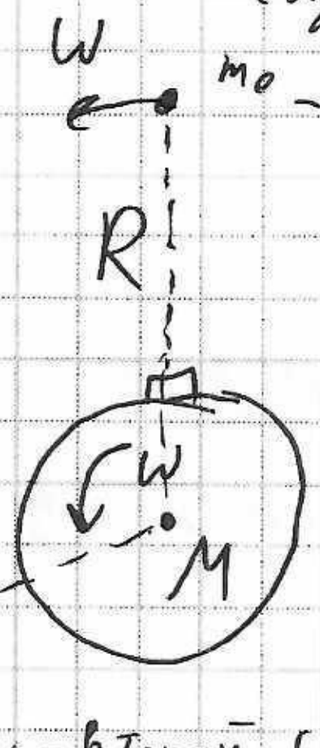
Задача №2

m_0 - геостационарная орбита $\quad \omega = \frac{2\pi}{24\ ч}$

$\omega_1 > \omega, \quad \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega} \Rightarrow \omega_1 = 2\omega$

$d_{min} = R - r - ?$

$\omega = \frac{2\pi}{24\ ч}$ пусть $T = 24\ ч$



$\begin{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \frac{GMm_0}{R^2} = m_0\omega^2 R \\ \frac{GMm_1}{r^2} = m_1 \cdot 4\omega^2 r \end{cases}$

$\frac{GM}{R^3} = \omega^2, \quad \frac{GM}{4r^3} = \omega^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^3 = 4r^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt[3]{4}}$ $\quad d_{min} = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$, $R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$

$\boxed{d_{min} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)}$

Ответ: $d_{min} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ - минимальное расстояние между спутниками, где M - масса планеты, T - 1 сутки (24 часа)

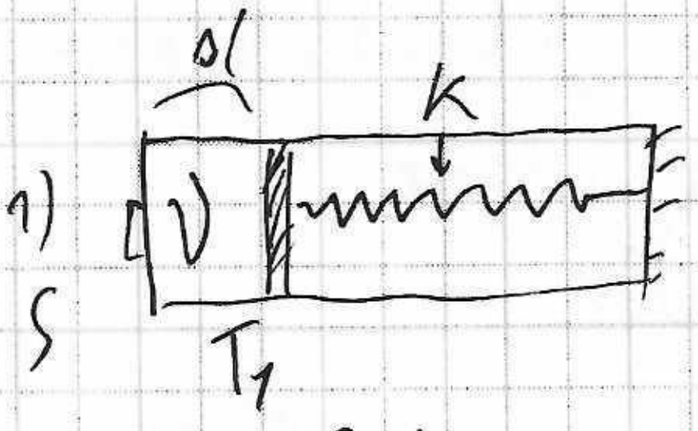
olymp.bmstu.ru

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

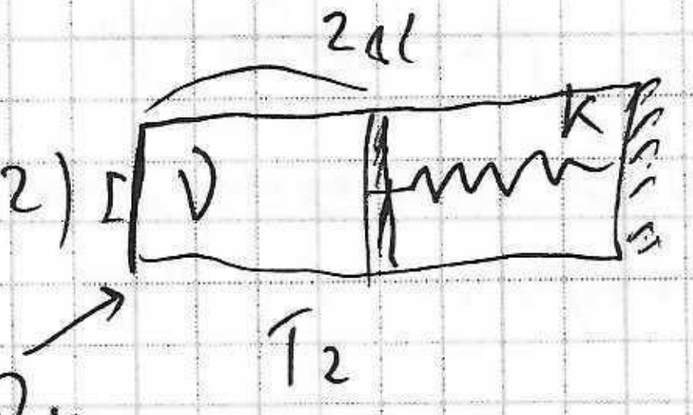
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 1

Задача №4



$P_1 = \frac{K\Delta l}{S}$ $\quad \frac{K\Delta l}{S} \cdot S\Delta l = K\Delta l^2 = \nu R T_1$



$P_2 = \frac{2K\Delta l}{S}$ $\quad P_2 V_2 = \frac{2K\Delta l}{S} \cdot 2\Delta l S = 4K\Delta l^2 = \nu R T_2$

Т.к. $K\Delta l^2 = \nu R T_1 = \frac{\nu R T_2}{4} \Rightarrow \boxed{T_2 = 4T_1}$

$Q_+ = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) + A$ (i – число степеней свободы частицы газа, и т.к. Аргон – инертный газ, то $i = 3$ в данном случае), $A = 1{,}5$ кДж по усл.

$Q_+ = \frac{3}{2}\nu R \cdot 3T_1 + A = \frac{9}{2}\nu R T_1 + A$, $\quad T_1 = \frac{K\Delta l^2}{\nu R} \Rightarrow$

$\Rightarrow Q_+ = \frac{9}{2} K\Delta l^2 + A$,

$\delta A = P\,dV$, $\quad A = \int_{V_1}^{V_2} P(V)\,dV$, газ совершал работу, толкая пружину $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = \Delta E_{kn}$, где E_{kn} – потенциальная энергия пружины.

$A = \int_{\Delta l}^{2\Delta l} Kx\,dx = \frac{Kx^2}{2}\Big|_{\Delta l}^{2\Delta l} = \frac{4K\Delta l^2}{2} - \frac{K\Delta l^2}{2} = \frac{3K\Delta l^2}{2} = A$

$K = \frac{2A}{3\Delta l^2} \Rightarrow Q_+ = \frac{9}{2} \cdot \frac{2A}{3\Delta l^2} \cdot \Delta l^2 + A = 3A + A = \boxed{4A} =$

$= 6$ кДж

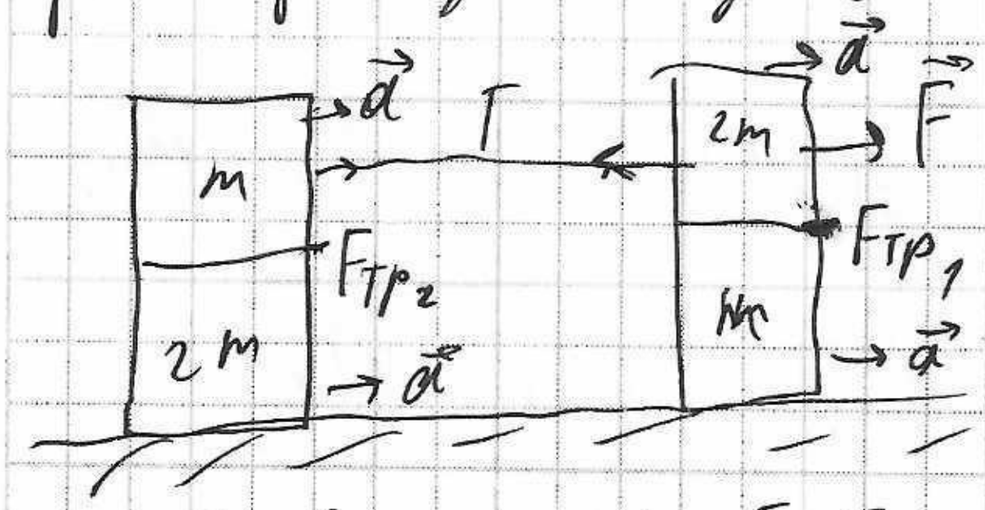
Ответ: газу было передано 6 кДж $= 6000$ Дж

Можно использовать оборот листа для записи решений

Задача №3

Рассмотрим момент времени t_x - ?, когда конструкция начнёт разрушаться, т.е либо кубики начнут двигаться отн. друг друга, либо порвётся нить.

Пусть кубики в момент t_x начинают двигаться отн. друг друга, при этом нить не порвана, тогда рассмотрим динамику левых и правых кубов.



$ma = T - F_{тр_2}$, если кубы двигаются как одно целое по гладкой поверхности под действием силы T, то $T = ma + 2ma = 3ma$, тогда

$ma = 3ma - F_{тр_2} \Rightarrow F_{тр_2} = 2ma$, Аналогично для всей системы, которая движется как одно целое и силы F: $F = 6ma$, тогда для правого верхнего: $2ma = F - T - F_{тр_1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2ma = 6ma - 3ma - F_{тр_1} \Rightarrow F_{тр_1} = ma \Rightarrow F_{тр_2} > F_{тр_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ верхний левый куб начнёт скользить по нижнему ровным, тогда в момент t_x $F_{тр_2} = \mu mg$ - сила Тр. скольжения, тогда для верхнего левого:

$ma = T - \mu mg \Leftrightarrow ma = 3ma - \mu mg \Leftrightarrow \mu mg = 2ma \Rightarrow a = \frac{\mu g}{2}$,

$T = 3ma = 3m \cdot \frac{\mu g}{2} = 7{,}5\,Н < T_0 = 10\,Н \Rightarrow$ нитка не порвётся, а верхний левый кубик разъедется с нижним.

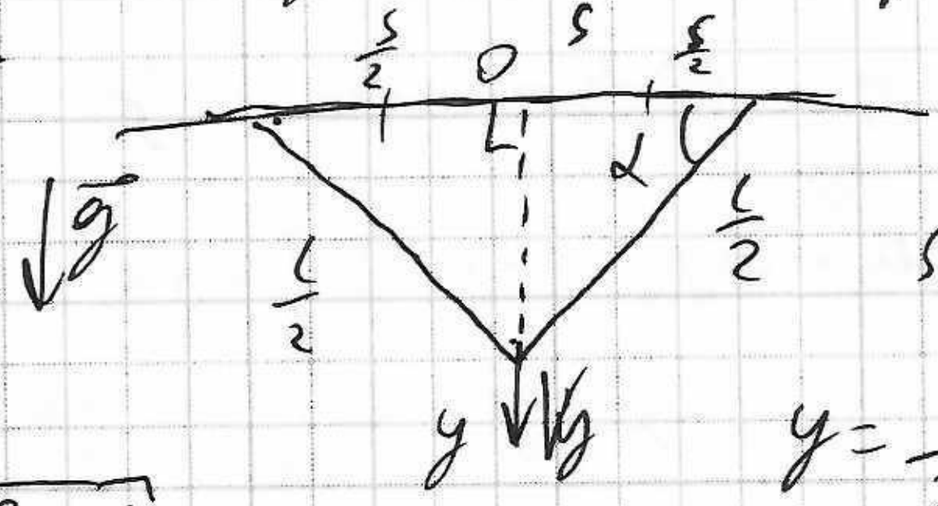
Из графика это случится при $F = 6ma = 15\,Н$, $t_x = 14\,с$

Ответ: конструкция сломается при $t_x = 14\,с$ от начала движения.

olymp.bmstu.ru

Задача №6

1) выразим V_y - скорость центральной бусинки по вертикали от V_x - скоростей бусинок на стержне и S - расстояние между ними:



$\cos\alpha = \frac{S}{2\cdot\frac{L}{2}} = \frac{S}{L}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{S^2}{L^2}} = \frac{\sqrt{L^2-S^2}}{L}$

$y = \frac{S}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{S}{2}\cdot\frac{\sqrt{L^2-S^2}}{L}\cdot\frac{L}{S}$

$y = \frac{\sqrt{L^2-S^2}}{2}$

$V_y = y'_{(t)} = \frac{1}{4\sqrt{L^2-S^2}}\cdot(-2S\dot{S})$, но $\dot{S} = -2V_x \Rightarrow$

$\Rightarrow V_y = \frac{SV_x}{\sqrt{L^2-S^2}}$ Запишем ЗСЭ для момента в условии: $S = 1{,}2$ м

$y(S=1{,}2) = \frac{9}{20}$ (м) $= 0{,}45$ (м) $\quad mgy = \frac{mV_y^2}{2} + \frac{2mV_x^2}{2} \Rightarrow$

$gy = \frac{S^2V_x^2}{2(L^2-S^2)} + V_x^2 = V_x^2\left(1+\frac{S^2}{2(L^2-S^2)}\right) = \frac{V_x^2(2L^2-S^2)}{2(L^2-S^2)}$

$V_x = \sqrt{\frac{2(L^2-S^2)gy}{2L^2-S^2}} = \frac{9\sqrt{34}}{34}$ (м/с) $= 1{,}54$ м/с

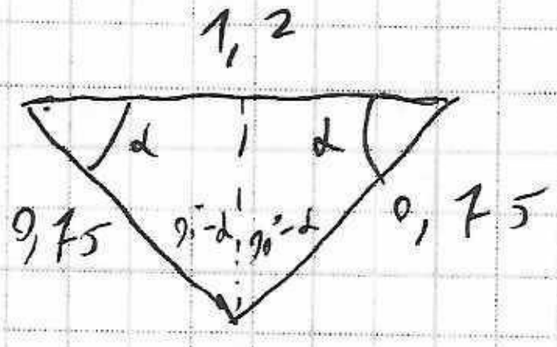
$V_y = \frac{6\sqrt{34}}{17}$ м/с $= 2{,}058$ м/с $\approx$ 2 м/с

2) выразим ускорения a_x и a_y бусинок для записи динамики процесса. $a_y = \dot{V}_y = \left(\frac{SV_x}{\sqrt{L^2-S^2}}\right)'(t) =$

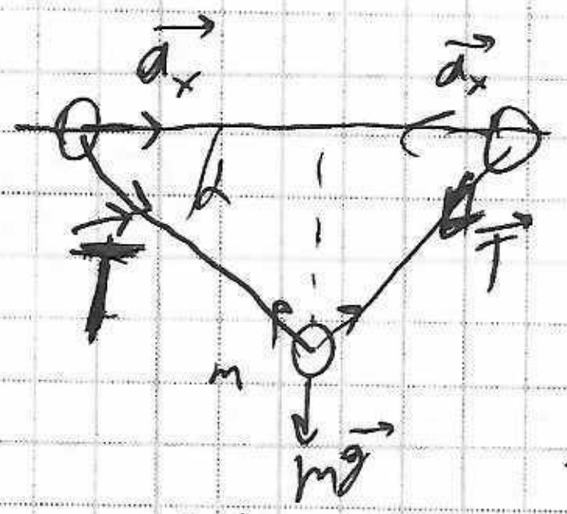
$= \frac{(\dot{S}V_x + S\dot{V}_x)\sqrt{L^2-S^2} - \ldots}{\ldots}$

$$= \frac{(\dot{s}V_x + sa_x)\sqrt{L^2-s^2} + sV_x \cdot \frac{1}{2\sqrt{L^2-s^2}}(-2s\dot{s})}{L^2-s^2} \overset{T}{=} \left[\begin{matrix}\dot{s}=-2V_x \\ \dot{V}_x = a_x\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{(sa_x - 2V_x^2)\sqrt{L^2-s^2} + \frac{s^2 V_x(-2V_x)}{\sqrt{L^2-s^2}}}{L^2-s^2} = \frac{(sa_x-2V_x^2)(L^2-s^2) - 2s^2V_x^2}{(L^2-s^2)^{\frac{3}{2}}} = a_y$$



$\cos\alpha = \frac{0,6}{0,75} = \frac{4}{5}$ $\quad \sin\alpha = \frac{3}{5}$



$$\begin{cases} ma_x = T\cos\alpha = \frac{4T}{5} \\ ma_y = mg - 2T\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_y = g - \frac{2T\sin\alpha}{m} = g - \frac{6T}{5m} \\ a_x = \frac{4T}{5m} \end{cases}$$

$s = 1,2$ м

$V_x = \frac{9\sqrt{34}}{34}$ м/с

$m = 0,1$ кг, $L = 3,5$ м

$$g - \frac{6T}{5m} = \frac{\left(5\cdot\frac{4T}{5m} - 2V_x^2\right)(L^2-s^2) - 2\cdot s^2 V_x^2}{(L^2-s^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (=)$$

$$(=) T\left(\frac{4s(L^2-s^2) + 6(L^2-s^2)^{\frac{3}{2}}}{5m}\right) = g(L^2-s^2)^{\frac{3}{2}} + 2V_x^2(L^2-s^2) + 2s^2V_x^2$$

$$T = \frac{\left(g(L^2-s^2)^{\frac{3}{2}} + 2V_x^2L^2\right)\cdot 5m}{4s(L^2-s^2) + 6(L^2-s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{315}{289}\ \text{м/с}^2 = 1,089\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx$$

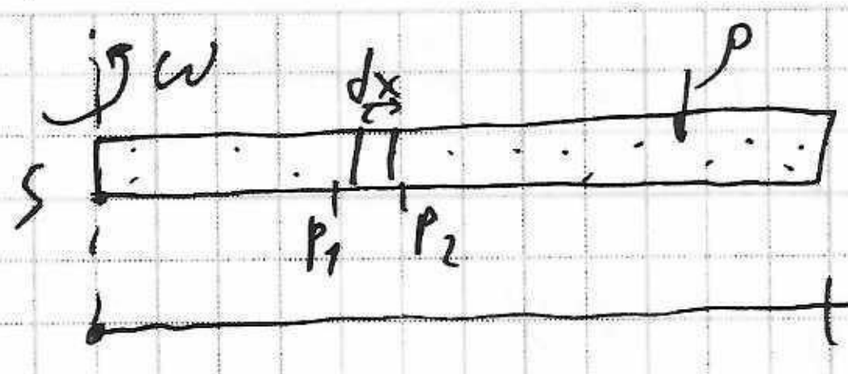
$\approx 1,1$ Н

Ответ: $V_x = 1,54$ м/с – скорость горизонтальных (крайних бусинок), $V_y = 2$ м/с – центральной бусинки, $T = 1,1$ Н – сила натяжения.

Задача №5

Рассмотрим некоторый горизонтальный участок тонкой трубки, вращающийся с уг. скоростью ω отн. своего конца для понимания процесса:

olymp.bmstu.ru



второй закон для маленького кусочка жидкости:

$$\rho S dx \cdot \omega^2 x = S(\underbrace{P_2 - P_1}_{dP}) \;|:S$$

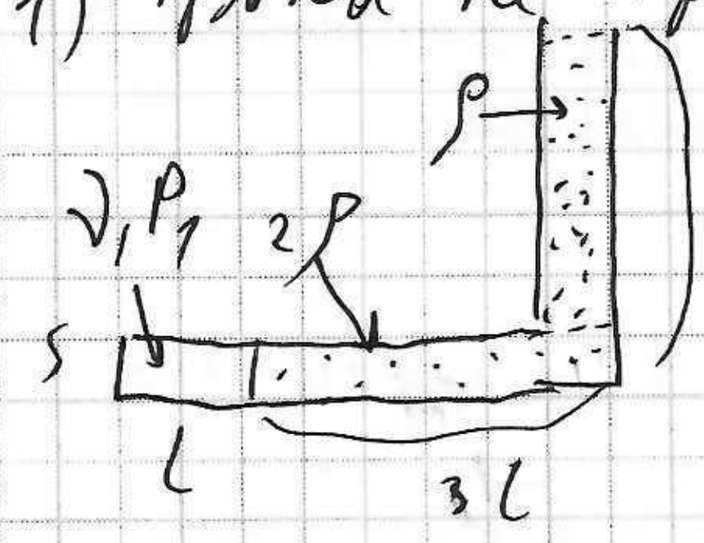
$$\rho x \omega^2 dx = dP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta P = \int_{x_1}^{x_2} \rho x \omega^2 dx = \frac{\rho x^2 \omega^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{\rho \omega^2}{2}(x_2^2 - x_1^2),\ \text{т.е.}$$

давление жидкости на гор. участке увеличивается $\sim x^2$ (x - расстояние от оси вращения).

В нашей задаче:

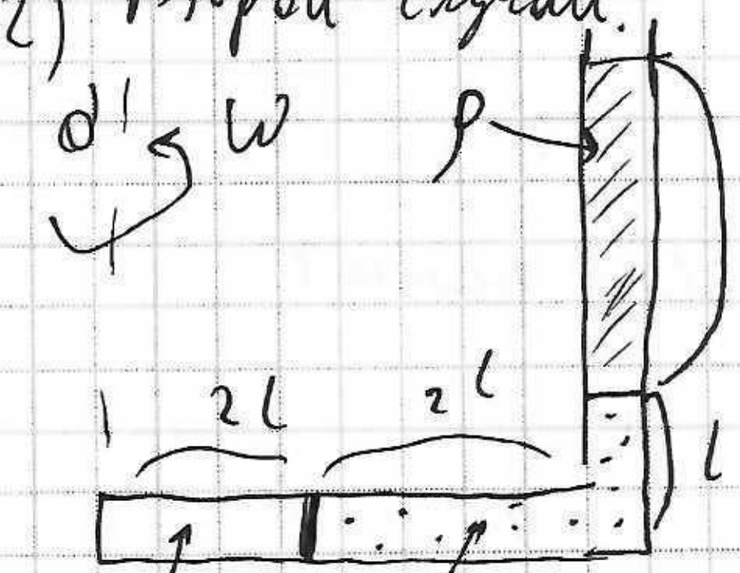
1) Трубка не вращается (1-я ситуация)



$$\begin{cases} P_1 \cdot Sl = \nu R T, \; T = \text{const по условию} \\ P_1 S = \rho g \cdot 4l \cdot S \Rightarrow P_1 = 4\rho g l \end{cases}$$

$$\nu R T = 4\rho g S l^2$$

2) Второй случай.



$T = \text{const} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$, $V_2 = 2V_1$ (2l во 2-м случае) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P_2 = 2\rho g l$$

Для точки соприкосновения воздуха и жидкости 2ρ:

$$2\rho g l = 4\rho g l + \frac{2\rho \omega^2}{2}\left((4l)^2 - (2l)^2\right)$$

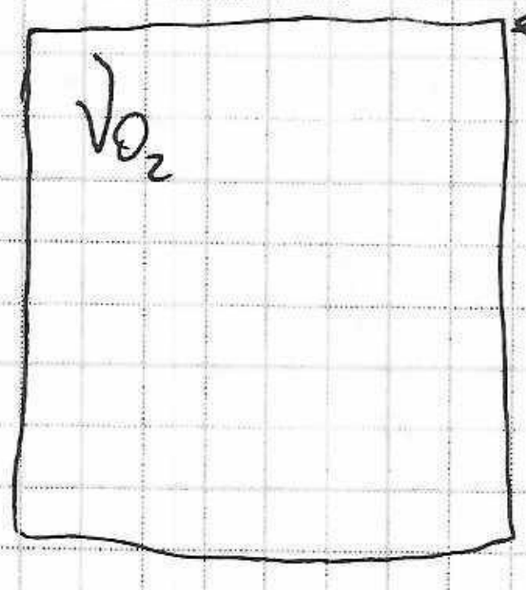
$$4\rho g l = \rho \omega^2 \cdot 12 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{g}{3l} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{3l}}}$$

Ответ: с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\frac{g}{3l}}$

Ситуационная задача.

Реакция горения Алюминия в кислороде:

$$Al + O_2 \to Al_2O_3 \quad \Rightarrow \quad 4Al + 3O_2 \rightleftharpoons 2Al_2O_3$$



$V = 1\,л \qquad T_0 = 293\,K \qquad R = 8{,}31\ Дж/моль \cdot K$

$P_0 = 0{,}5\ атм = \frac{1}{2} 10^5\ Па$

$$PV = \nu_{O_2} R T_0 \Rightarrow \nu_{O_2} = \frac{P_0 V}{R T_0}$$

$M_{(Al)} = 0{,}027\ кг/моль$

$M_{(O_2)} = 0{,}032\ кг/моль$

$M_{(Al_2O_3)} = 0{,}102\ кг/моль$

Так как после сгорания масса кислорода уменьшилась вдвое, то прореагировало кол-во кислорода

$$\frac{\nu_{O_2}}{2} = \frac{P_0 V}{2RT_0} = \nu_1$$

$4\nu_x Al + 3\nu_x O_2 \rightleftharpoons 2\nu_x Al_2O_3$, где ν_x - какое-то кол-во вещества $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \nu_{Al_2O_3} = \frac{2}{3}\nu_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{P_0 V}{2RT_0} = \frac{P_0 V}{3RT_0}$$

$$m_{Al_2O_3} = M_{(Al_2O_3)} \cdot \nu_{Al_2O_3} = 0{,}102\ кг/моль \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^5\ Па \cdot 0{,}001\ м^3}{3 \cdot 293\,K \cdot 8{,}31\ Дж/моль K} =$$

$$= 6{,}98 \cdot 10^{-4}\ кг \approx \boxed{0{,}72}$$

$P_2 = \nu_2 RT_0 = P_1 = \frac{P_0}{2} = \frac{1}{4}\cdot 10^5\ Па$

Ответ: $m_{Al_2O_3} = 0{,}72$ - масса оксида алюминия,

$P_1 = 0{,}25\ атм$ - давление в конце реакции

olymp.bmstu.ru